

Σεπτεμβρίου 2013

ΘΕΜΑ 1

Να βρεθούν τα υπόλοιπα a και b των διαιρέσεων

$$\frac{1!+2!+3!+\dots+99+100!}{12} \quad \text{και} \quad \frac{3^{999999999}}{11}$$

αντίστοιχα, και ακολούθως να λύσετε την γραμμική ισοτιμία: $ax \equiv b \pmod{2013}$.

ΘΕΜΑ 2

Αν n είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε δείξτε ότι :

$$\varphi(n) = \varphi(2n) \Leftrightarrow \text{ο αριθμός είναι περιττός}$$

όπου φ είναι η συνάρτηση του Euler.

ΘΕΜΑ 3

Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής $3k+2$.

ΘΕΜΑ 4

Αν a, n, m είναι φυσικοί αριθμοί, να προσδιοριστεί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $\delta = (a^n - 1, a^m + 1)$

ΘΕΜΑ 5

Να υπολογισθούν τα αθροίσματα :

$$(\alpha) \sum_{d|n} \tau(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad (\beta) \sum_{d|n} \sigma(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \quad (\gamma) \sum_{\kappa=1}^n \mu(\kappa!)$$

όπου μ είναι η συνάρτηση του Mobius, και $\tau(n)$, αντίστοιχα $\sigma(n)$, συμβολίζει το πλήθος αντίστοιχα το άθροισμα, των διαιρετών του n .

ΘΕΜΑ 6

Στο αμφιθέατρο του Τμήματος Μαθηματικού εξετάζονται φοιτητές στο μάθημα της Θεωρίας Αριθμών. Το πλήθος των φοιτητών είναι μεγαλύτερο από 250 και μικρότερο από 300. Όταν ο εξεταστής μετράει τους φοιτητές ανά 12 του περισσεύουν 9 και όταν τους μετράει ανά 16 του περισσεύουν 5. Να βρεθεί ο αριθμός των εξεταζόμενων φοιτητών.

ΘΕΜΑ 7

Να βρεθούν όλα τα στοιχεία των ομάδων

$$U(Z_{10}), \quad U(Z_{11}), \quad U(Z_{12})$$

και να βρεθούν (αν υπάρχουν) όλες οι πρωταρχικές ρίζες $\pmod{10}$, $\pmod{11}$ και $\pmod{12}$

ΘΕΜΑ 8

Να λυθεί το ακόλουθο σύστημα γραμμικών ισοτιμιών

$$(\Sigma) \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{36} \\ x \equiv 7 \pmod{40} \\ x \equiv 32 \pmod{75} \end{cases}$$